各种格林函数的定义

$$G^{>}(\vec{k}, t-t') = -i\langle\langle a_{\vec{k}}(t)\, a^{+}_{\vec{k}}(t')\rangle\rangle$$

$$G^{<}(\vec{k}, t-t') = \pm i\langle\langle a^{+}_{k}(t')\, a_{k}(t)\rangle\rangle$$

(符号约定：出现的 $\pm$ 或 $\mp$，上面的表示费米子，下面的表示玻色子)

显然 $G(\vec{k}, t-t') = \theta(t-t')\, G^{>}(\vec{k}, t-t') + \theta(t'-t)\, G^{<}(\vec{k}, t-t')$

$G^{>}$ 与 $G^{<}$ 的关系

$$G^{>}(\vec{k}, t-t') = \mp G^{<}(\vec{k}, t-t'+i\beta)$$

证明：

$$G^{>}(\vec{k}, t-t') = -i\,\mathrm{Tr}\left(a_k(t)\, a^{+}_{k}(t')\, e^{-\beta(H-\mu N)}\right)/Z$$

$$= -i\,\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(H-\mu N)}\, e^{i(H-\mu N)t}\, a_k\, e^{-i(H-\mu N)t}\, e^{i(H-\mu N)t'}\, a^{+}_{k}\, e^{-i(H-\mu N)t'}\right)/Z$$

$$= -i\,\mathrm{Tr}\left(a^{+}_{k}\, e^{-i(H-\mu N)t'}\, e^{-\beta(H-\mu N)}\, e^{i(H-\mu N)t}\, a_k\, e^{-i(H-\mu N)(t-t')}\right)/Z$$

$$= -i\,\mathrm{Tr}\left(a^{+}_{k}\, e^{i(H-\mu N)(t-t'+i\beta)}\, a_k\, e^{-i(H-\mu N)(t-t'+i\beta)}\, e^{-(H-\mu N)\beta}\right)/Z$$

$$= -i\,\mathrm{Tr}\left(a^{+}_{k}(t=0)\, a_k(t-t'+i\beta)\, e^{-(H-\mu N)\beta}\right)/Z$$

$$= \mp G^{<}(\vec{k}, t-t'+i\beta)$$

谱表示

谱函数 $-iA(\vec{k}, \omega)$ 　物理可观测，反映态密度

定义谱函数

$$-iA(\vec{k},w) = G^{>}(\vec{k},w) - G^{<}(\vec{k},w)$$

利用 $G^{>}(\vec{k},w)$ 与 $G^{<}(\vec{k},w)$ 关系式

$$\boxed{G^{>}(\vec{k},w) = \mp G^{<}(\vec{k},w)\, e^{\beta w}}$$

作业①，证明该关系式成立

可得

$$G^{>}(\vec{k},w) = -i(1 \mp n(w)A(\vec{k},w))$$

$$G^{<}(\vec{k},w) = \pm i\, n(w)\, A(\vec{k},w)$$

其中 $n(w) = \dfrac{1}{e^{\beta w} \mp 1}$

下面求格林函数 $G(\vec{k},w)$ 的谱表示

由前面我们已知

$$G(\vec{k},t) = \theta(t)\, G^{>}(\vec{k},t) + \theta(-t)\, G^{<}(\vec{k},t)$$

则 $G(\vec{k},w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt}\, G(\vec{k},t)\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt}\,\theta(t)\, G^{>}(\vec{k},t)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt}\,\theta(-t)\, G^{<}(\vec{k},t)\, dt$$

阶跃函数

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{e^{iw't}}{w' - i0_+}$$

代入得

$$\theta(-t) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{e^{iw't}}{w' + i0_+}$$

$$G(\vec{k},w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} dw' \int_{-\infty}^{+\infty} dt \quad e^{i(w+w')t} \left[\frac{G^{>}(\vec{k},t)}{w'-i0_+} - \frac{G^{<}(\vec{k},t)}{w'+i0_+} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} dw' \left[\frac{G^{>}(\vec{k}, w+w')}{w'-i0_+} - \frac{G^{<}(\vec{k}, w+w')}{w'+i0_+} \right]$$

将 $G^{>}$ 和 $G^{<}$ 的谱表示代入，得

$$G(\vec{k},w) = \int \frac{dw'}{2\pi} A(\vec{k},w) \left[\frac{1 \mp n(w')}{w-w'+i0_+} \pm \frac{n(w')}{w-w'-i0_+} \right]$$

谱函数的特点：归一

$$\int \frac{dw}{2\pi} A(\vec{k},w) = 1$$

证明：$\int \frac{dw}{2\pi} A(\vec{k},w) = \int \frac{dw}{2\pi} i(G^{>}(k,w) - G^{<}(k,w))$

$$= i\int \frac{dw}{2\pi} \int dt \; e^{iwt} (G^{>}(k,t) - G^{<}(k,t))$$

利用了 $\int \frac{dw}{2\pi} e^{iwt} = \delta(t)$

$$= i[G^{>}(\vec{k},t=0) - G^{<}(\vec{k},t=0)]$$

$$= \langle\langle a_k a_k^+ \pm a_k^+ a_k \rangle\rangle$$

$$= 1$$ $\Leftarrow$ 实际上是粒子数守恒的结果

实空间

$\int \frac{dw}{2\pi} A(r,r',w) = \delta(r-r') \overset{\text{证明}}{\Leftarrow}$ 作业②

涨落耗散定理

$$G(\vec{k},w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw'}{2\pi} A(\vec{k},w') \left[\frac{1 \mp n(w')}{w-w'+i0_+} \pm \frac{n(w')}{w-w'-i0_+} \right]$$

根据 $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \underbrace{P(\frac{1}{x})}_{\text{主值}} \mp i\pi\delta(x)$

则 $G(\vec{k},w)$ 实部

$$Re\, G(\vec{k},w) = P\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw'}{2\pi} A(\vec{k},w') \frac{1}{w-w'} \right)$$

虚部

$$Im\, G(\vec{k},w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw'}{2\pi} A(\vec{k},w')(-\pi)\delta(w-w')[1 \mp 2n(w')]$$

$$= -\frac{1}{2} A(\vec{k},w) \begin{cases} th\frac{\beta w}{2} & \text{费米子} \\ cth\frac{\beta w}{2} & \text{玻色子} \end{cases}$$

$thx = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

$cthx = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

作业① 证明 $G^>(\vec{k},w) = \mp G^<(\vec{k},w) e^{\beta w}$ 成立

由于 $G^>(\vec{k},t) = \mp G^<(\vec{k},t+i\beta)$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} G^>(\vec{k},t) e^{iwt} dt = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} G^<(\vec{k},t+i\beta) e^{iwt} dt$

$$G^>(\vec{k},w) = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} G^<(\vec{k},t') e^{iw(t'-i\beta)} dt'$$

$$= \mp G^<(\vec{k},w) e^{\beta w}$$

作业② 证明 $\int \frac{dw}{2\pi} A(\vec{r},\vec{r}',w) = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$

$$\int \frac{dw}{2\pi} A(\vec{r},\vec{r}',w) = \int \frac{dw}{2\pi}\, i\left(G^{>}(\vec{r},\vec{r}',w) - G^{<}(\vec{r},\vec{r}',w)\right)$$

$$= i\int \frac{dw}{2\pi} \int dt\, e^{iwt}\left(G^{>}(r,r',t) - G^{<}(r,r',t)\right)$$

$$= i\left[G^{>}(r,r',t=0) - G^{<}(r,r',t=0)\right]$$

$$= \langle\langle a_r a_{r'}^{+} \mp a_{r'}^{+} a_r \rangle\rangle$$

$$= \delta(r-r')$$